

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

dysleksja

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

## POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla, linijki oraz kalkulatora.
8. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

*Życzymy powodzenia!*

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

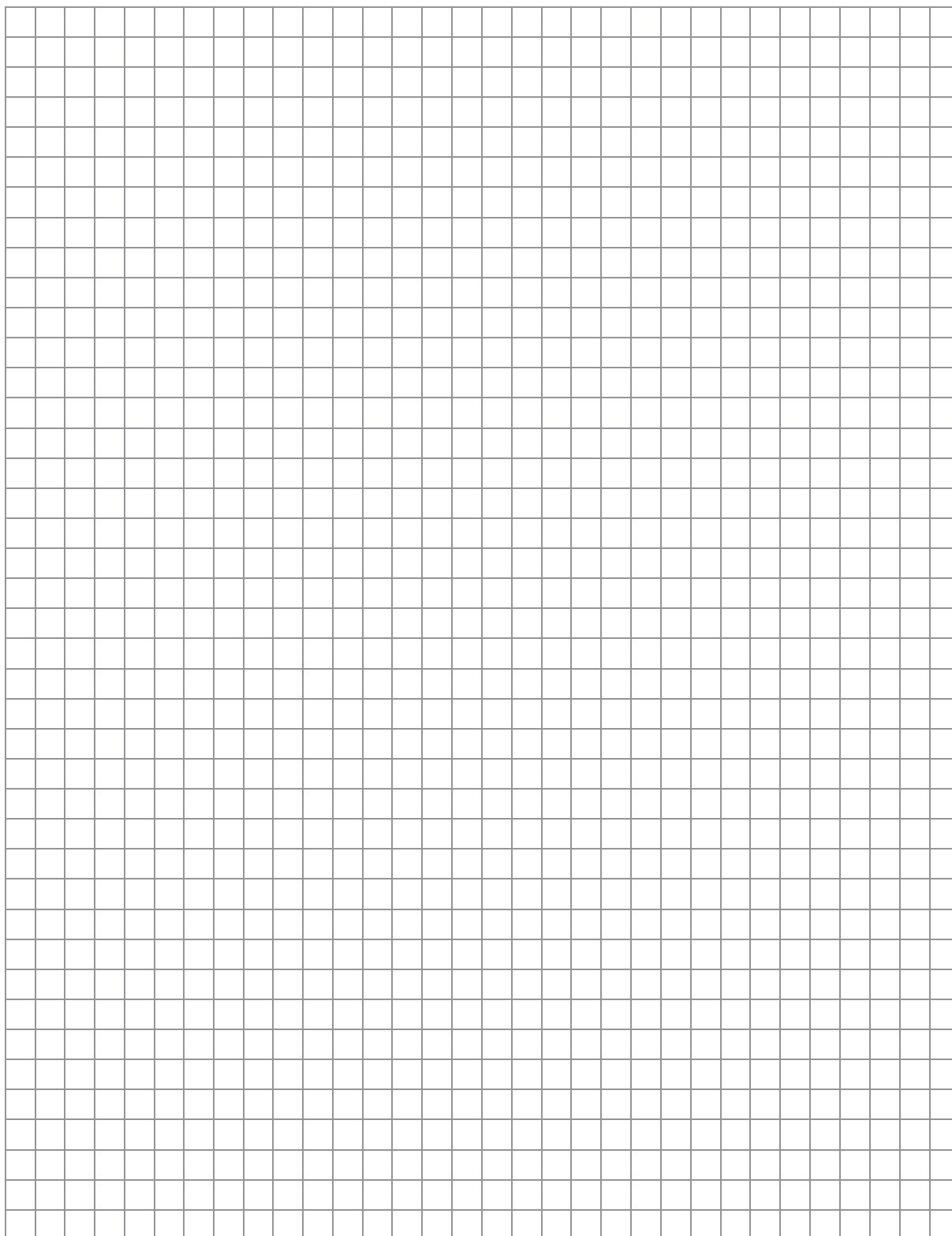
--	--	--

KOD  
ZDAJĄCEGO

**Zadanie 1. (6 pkt)**

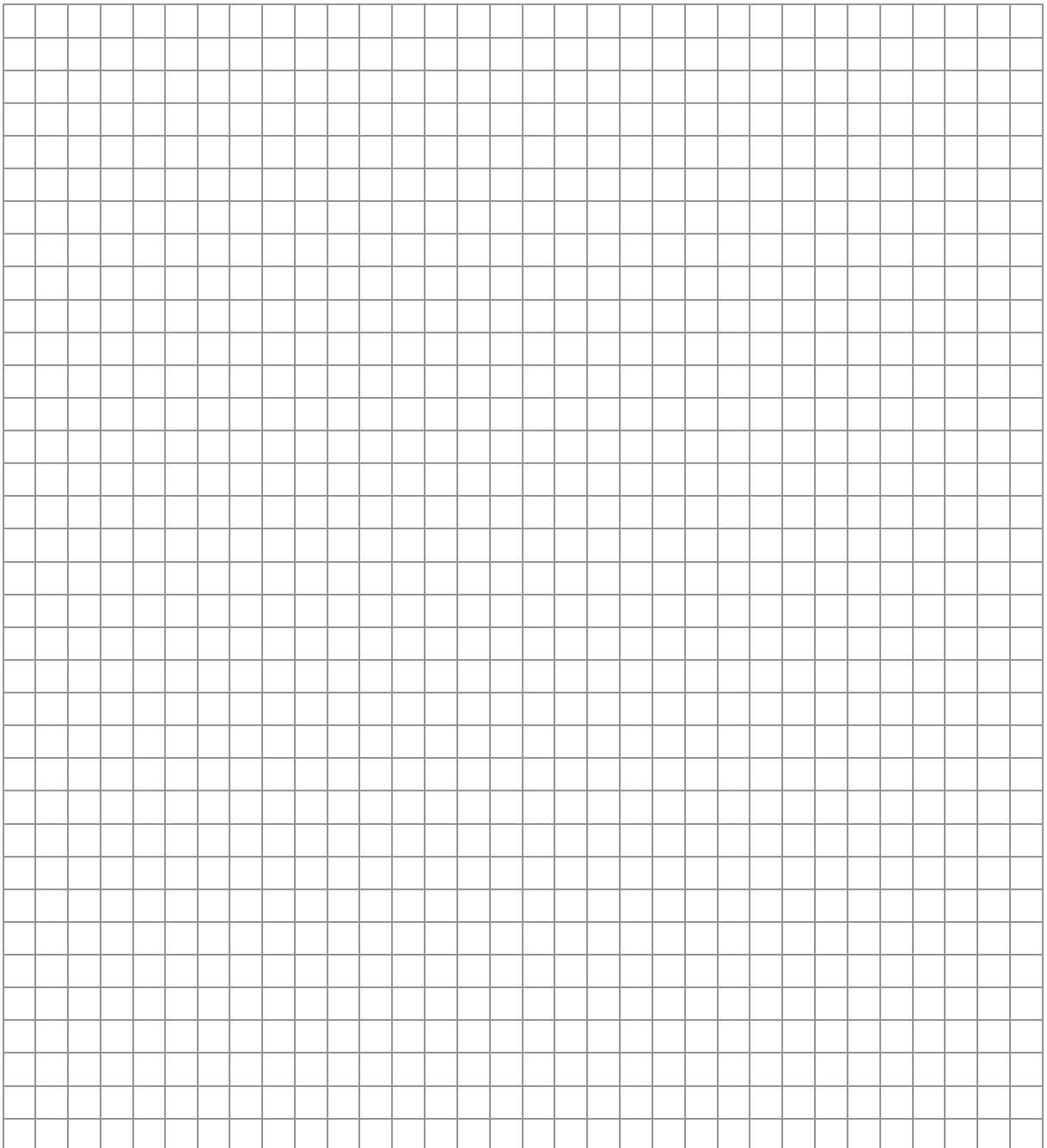
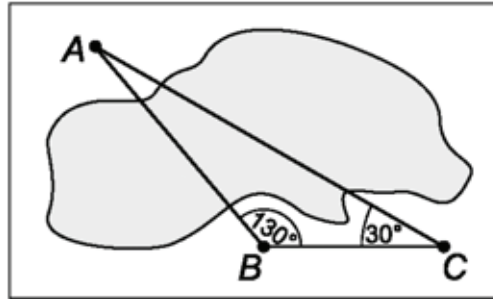
Dany jest ciąg  $(a_n)$  o wyrazie ogólnym  $a_n = \frac{5-3n}{7}$   $n = 1, 2, 3, \dots$

- a) Sprawdź, czy ciąg  $(a_n)$  jest arytmetyczny.
- b) Oblicz, dla jakiej wartości  $x$  liczby  $a_4, x^2 + 2, a_{11}$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.



**Zadanie 2. (3 pkt)**

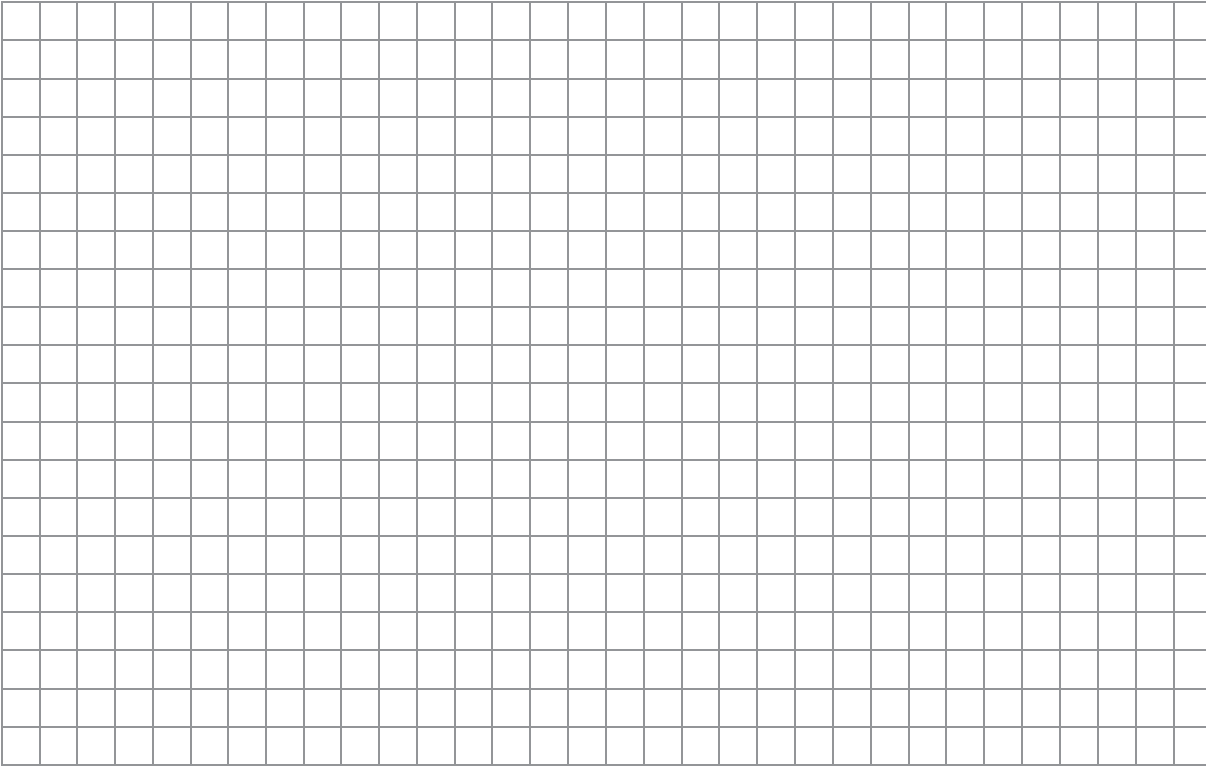
Obiekty  $A$  i  $B$  leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami  $B$  i  $C$  jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami  $A$  i  $B$  i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



**Zadanie 3. (3 pkt)**

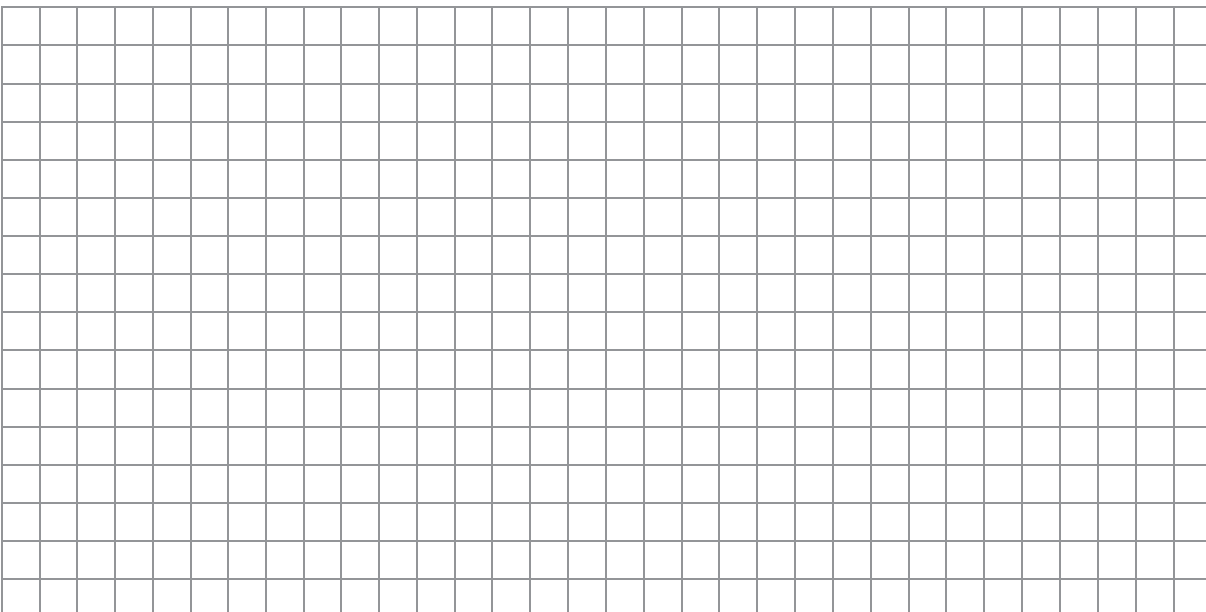
Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ .

a) Narysuj wykres funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -4, 3 \rangle$ .



b) Narysuj wykres funkcji  $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ , której dziedziną jest zbiór  $(-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 5)$ .

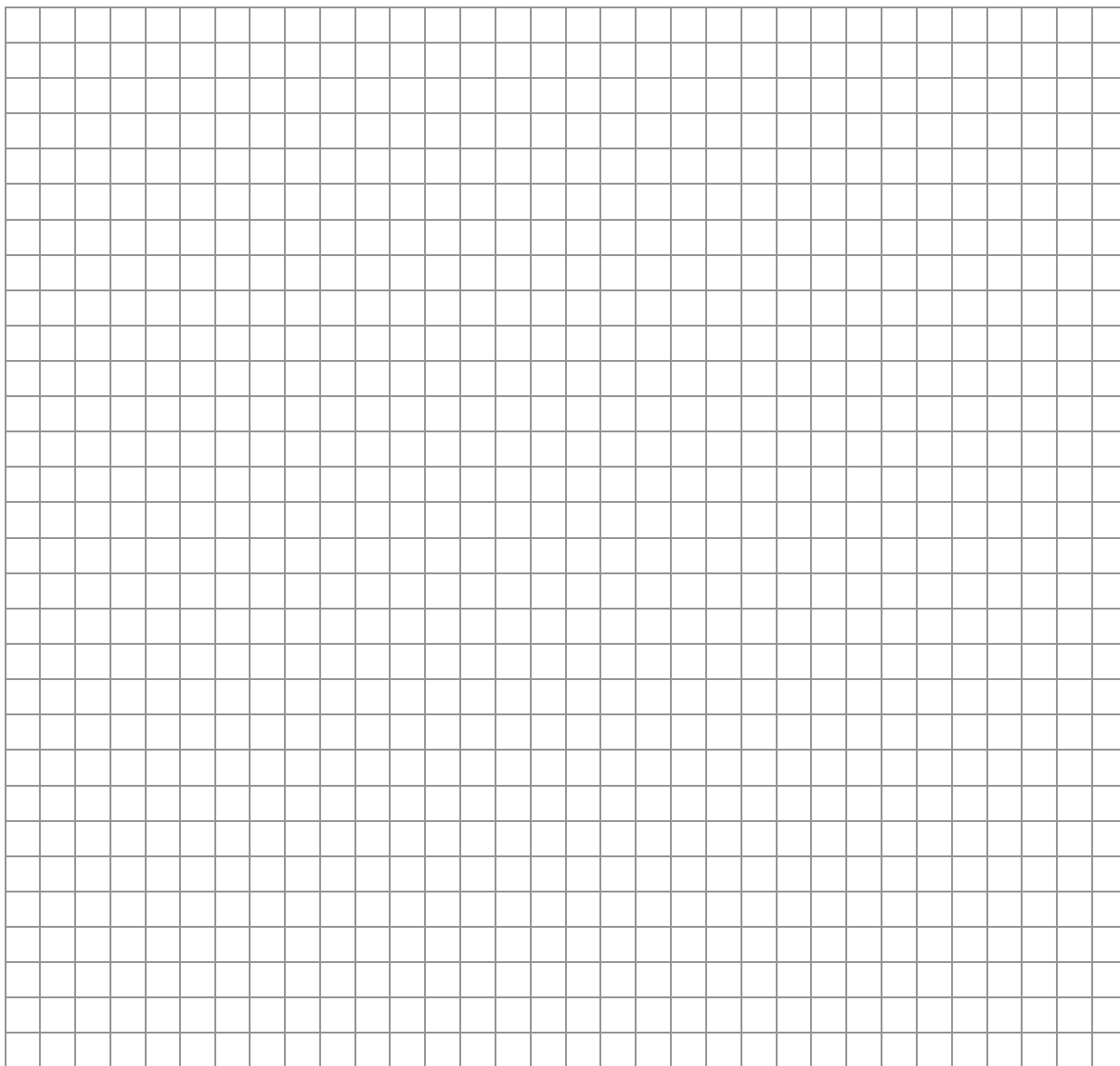
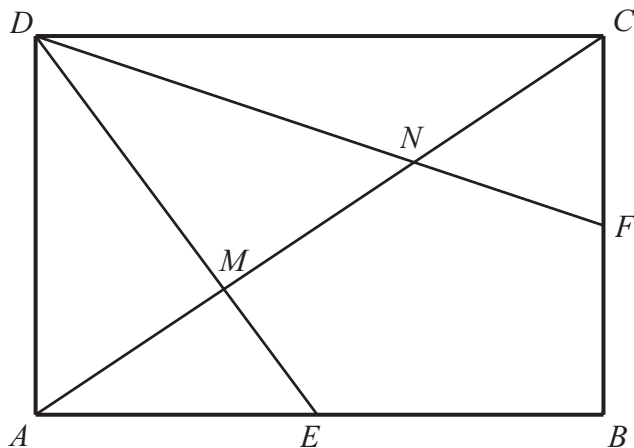
c) Zapisz zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) < 0$ .



**Zadanie 4. (4 pkt)**

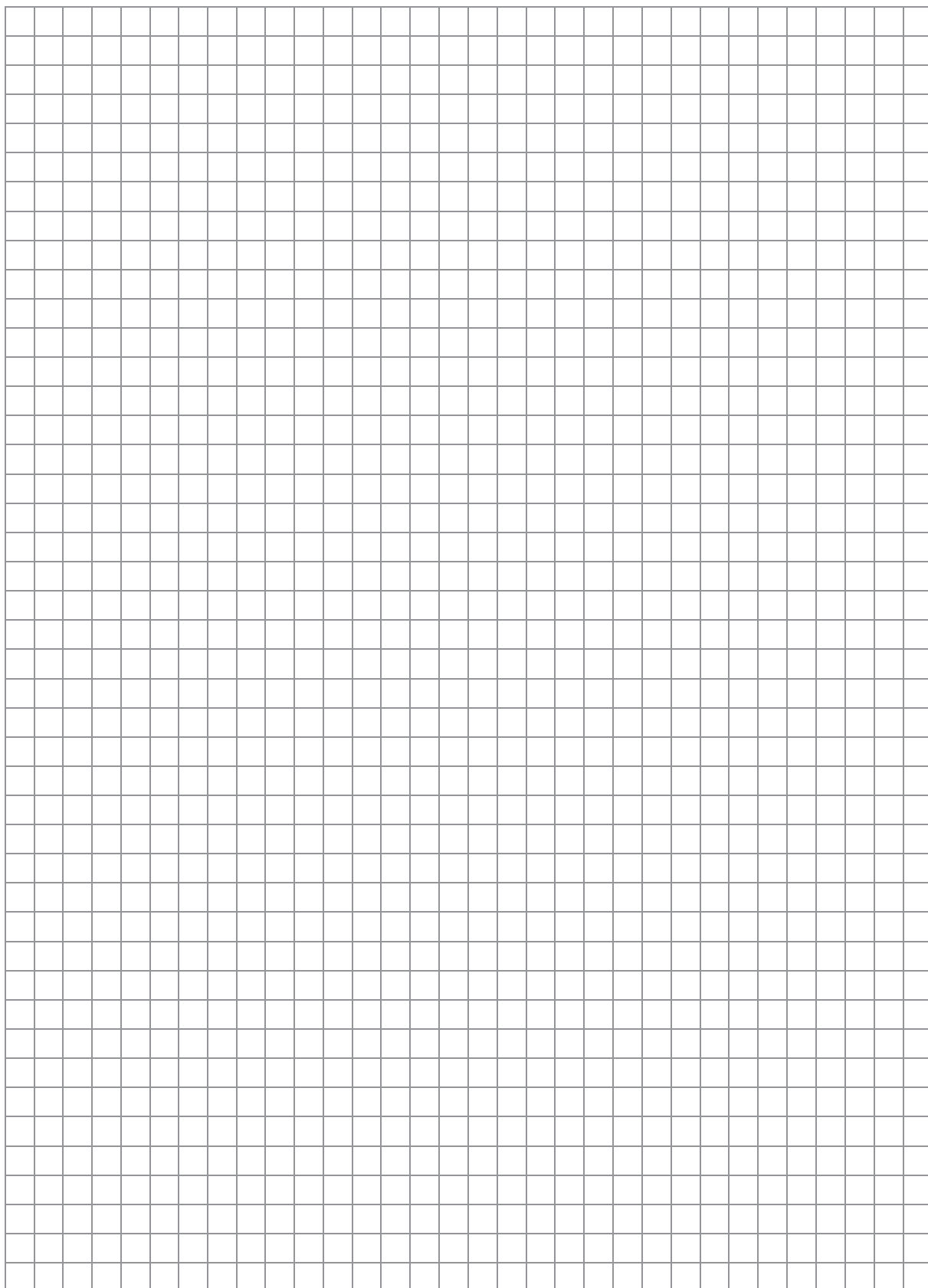
W prostokącie  $ABCD$  wierzchołek  $D$  połączono odcinkami ze środkami  $E$  i  $F$  boków  $AB$  i  $BC$ , zaś  $M$  i  $N$  to punkty przecięcia tych odcinków z przekątną  $AC$  (patrz rysunek).

- Uzasadnij, że odcinki  $AM$ ,  $MN$  i  $NC$  są jednakowej długości.
- Uzasadnij, że trójkąty  $AEM$  i  $CNF$  mają równe pola.



**Zadanie 5. (4 pkt)**

Dane są punkty  $A = (-4, 32)$  i  $B = (-36, 16)$ . Wykaż, że koło o średnicy  $AB$  jest zawarte w II ćwiartce prostokątnego układu współrzędnych.



**Zadanie 6. (6 pkt)**

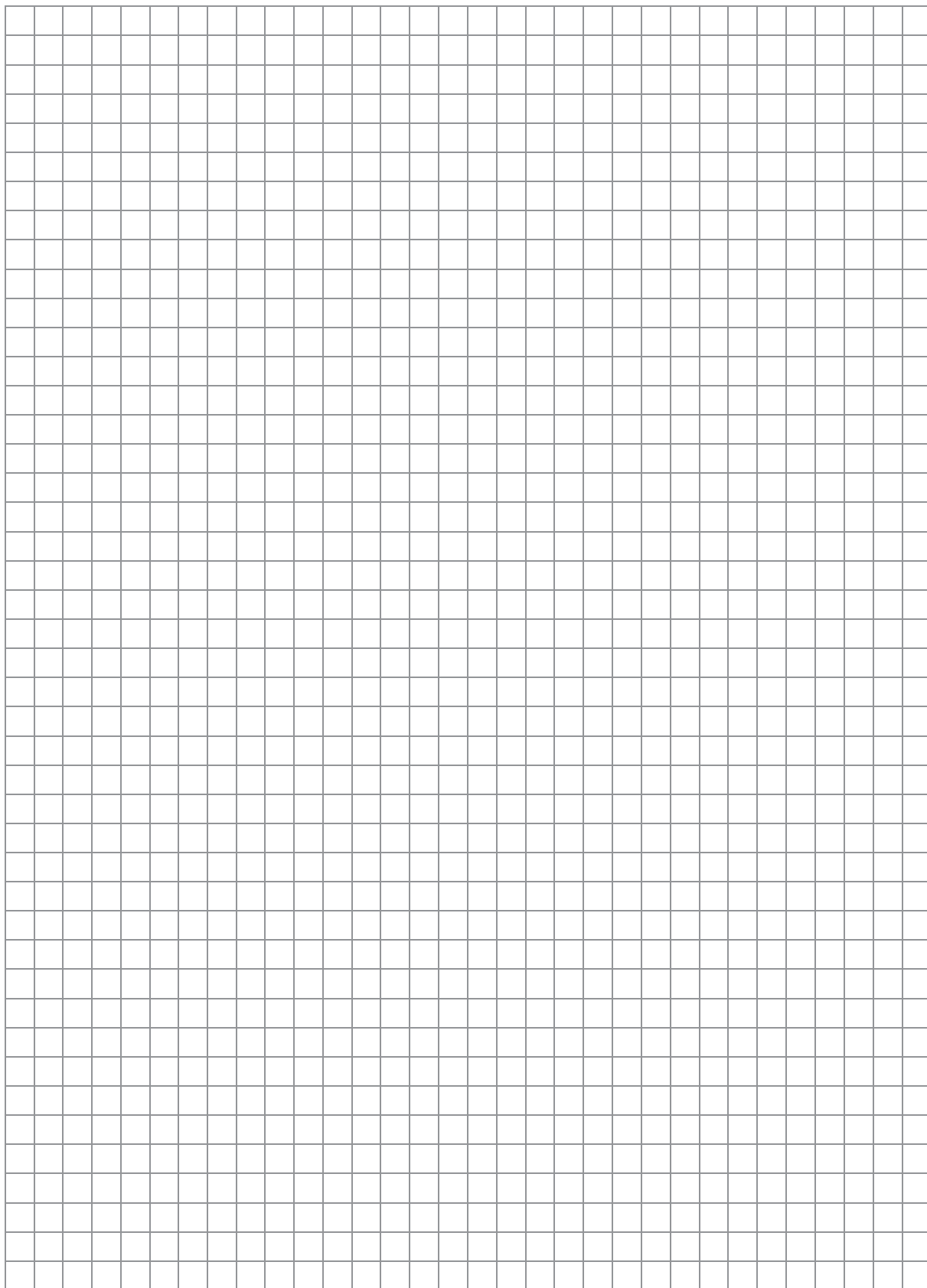
Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 + cx^2 + 7x + d$ .

- a) Wyznacz wartości współczynników  $c$  i  $d$  wielomianu  $W$ , gdy jest podzielny przez dwumian  $(x+2)$ , zaś przy dzieleniu przez dwumian  $(x-1)$  otrzymujemy resztę 3.
- b) Dla  $c = -5$  i  $d = -3$  rozwiąż nierówność  $W(x) \leq 0$ .



**Zadanie 7. (3 pkt)**

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania  $2 \cos^2 x = \cos x$  należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .






**Zadanie 8. (4 pkt)**

Dany jest ciąg  $(a_n)$  o wyrazie ogólnym  $a_n = \frac{120}{n+1}$  dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

Ze zbioru liczb  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}\}$  losujemy kolejno, trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  – wylosujemy trzy liczby całkowite, które będą kolejnymi wyrazami ciągu malejącego.

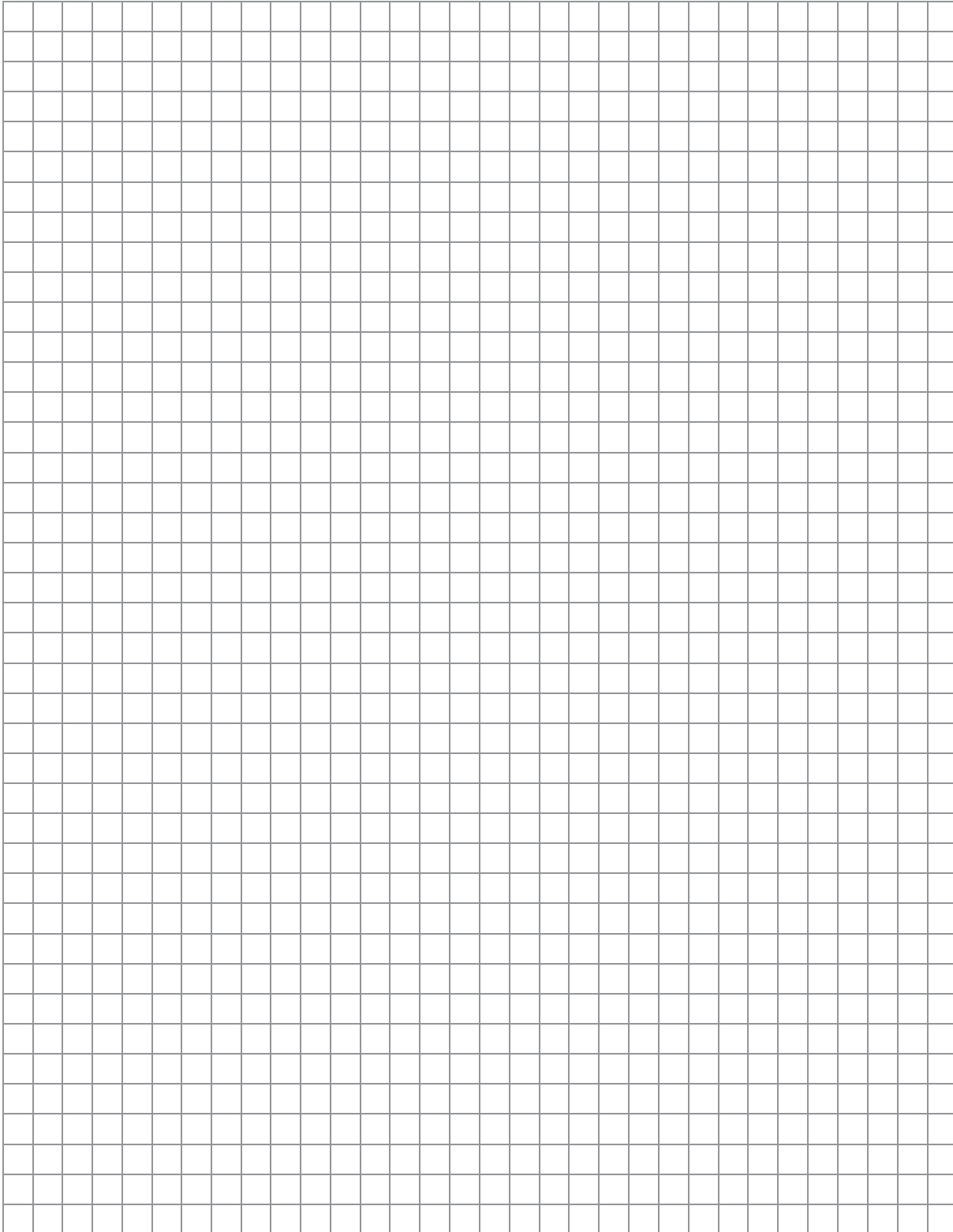


**Zadanie 9. (6 pkt)**

Na okręgu o danym promieniu  $r$  opisano trapez równoramienny  $ABCD$  o dłuższej podstawie

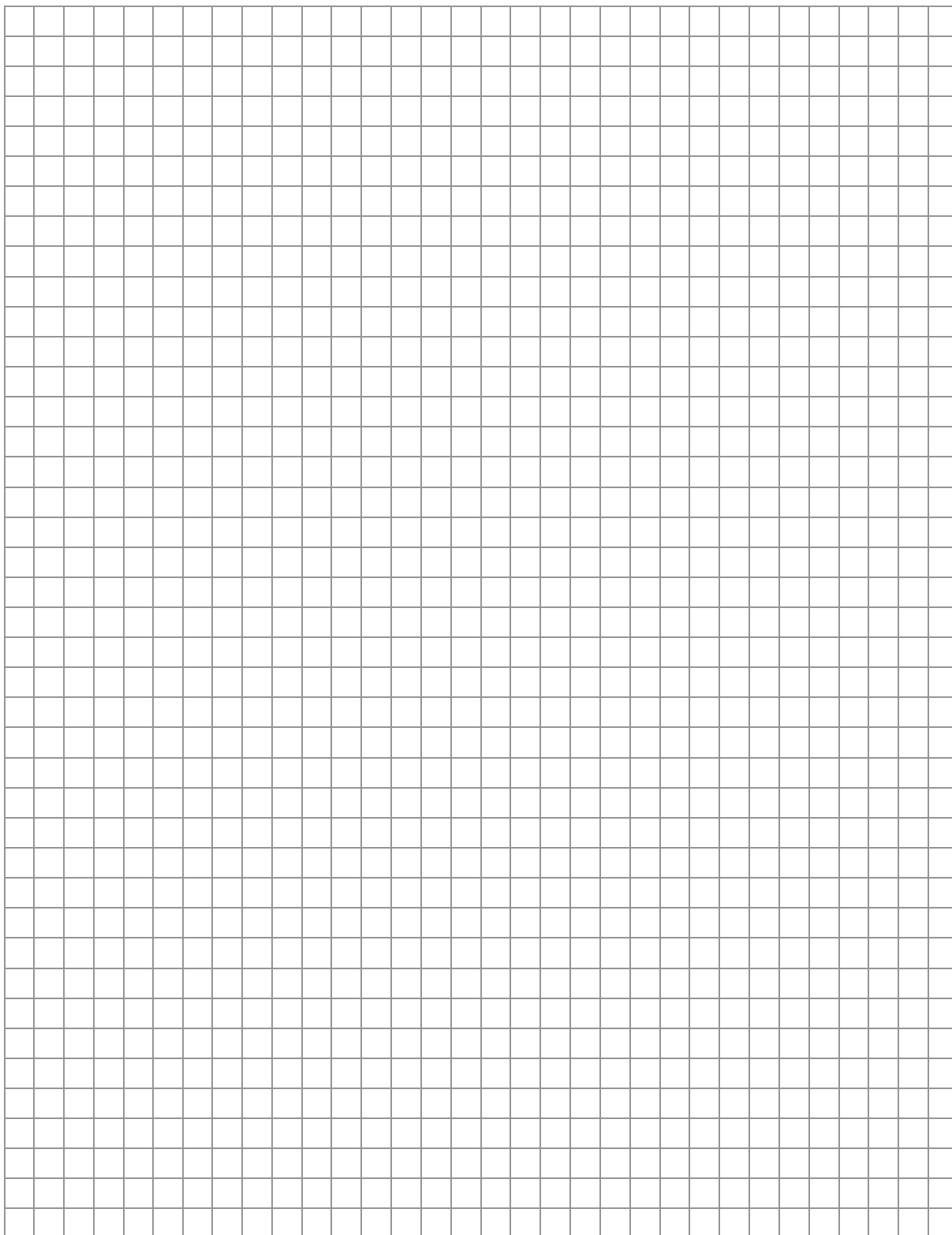
$AB$  i krótszej  $CD$ . Punkt styczności  $K$  dzieli ramię  $BC$  tak, że  $\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{2}{3}$ .

- a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.
- b) Oblicz cosinus kąta  $CBD$ .



**Zadanie 10. (6 pkt)**

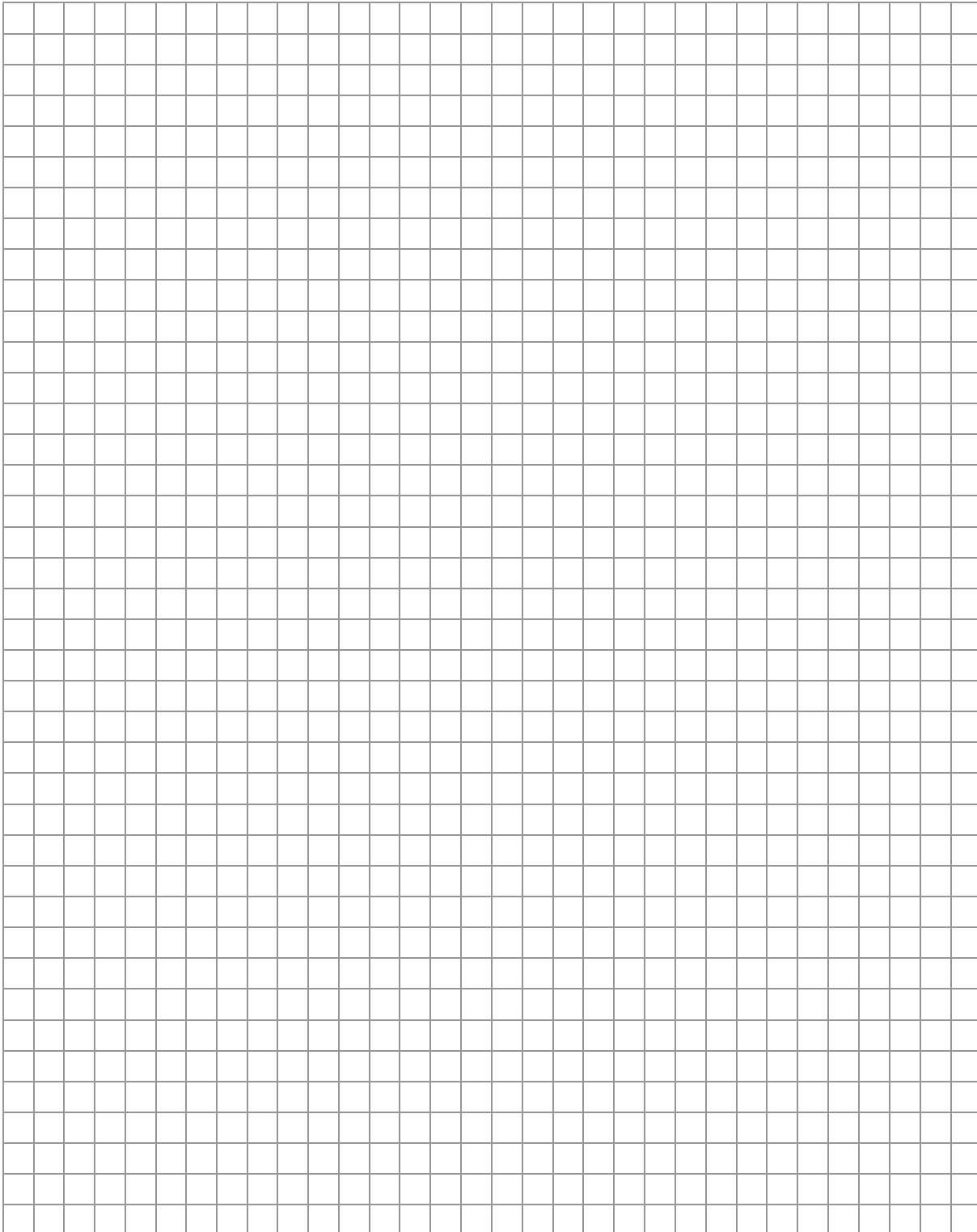
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa  $a$ . Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę  $45^\circ$ . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.



**Zadanie 11. (5 pkt)**

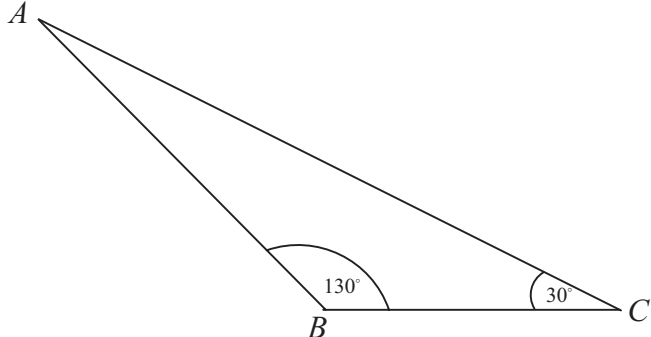
Ostrokątny trójkąt równoramienny  $ABC$  o podstawie  $AB$  jest wpisany w okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 = 25$ . Punkty  $A$  i  $B$  leżą na prostej o równaniu  $y = x - 5$ .

- a) Oblicz współrzędne punktów:  $A, B, C$ .
- b) Oblicz kąty trójkąta  $ABC$ .



## OCENIANIE POZIOM ROZSZERZONY

Przedstawione w tabeli rozwiązania zadań należy traktować jako przykładowe. Odpowiedzi zdającego mogą przybierać różną formę, ale muszą być poprawne merytorycznie i rachunkowo.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania		Liczba punktów
<b>1.</b>	1.1	Zapisanie wyrazu $a_{n+1}$ : $a_{n+1} = \frac{2-3n}{7}$ lub $a_{n+1} = \frac{5-3(n+1)}{7}$ .	1
	1.2	Wyznaczenie różnicy ciągu: $a_{n+1} - a_n = -\frac{3}{7}$ oraz zapisanie wniosku: ciąg $(a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym.	1
	1.3	Wyznaczenie wyrazów ciągu $(a_n)$ : $a_4 = -1$ ; $a_{11} = -4$ .	1
	1.4	Wykorzystanie definicji lub własności ciągu geometrycznego do zapisania warunków zadania.	1
	1.5	Zapisanie równania (alternatywy równań) z jedną niewiadomą $x$ .	1
	1.6	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $x = 0$ .	1
<b>2.</b>	2.1	 <p>Zastosowanie twierdzenia sinusów do wyznaczenia szukanej odległości: np. <math>\frac{400}{\sin 20^\circ} = \frac{ AB }{\sin 30^\circ}</math>.</p>	1
	2.2	Obliczenie odległości obiektu $A$ od obiektu $B$ : $ AB  = \frac{200}{\sin 20^\circ}$ .	1
	2.3	Podanie odpowiedzi: 585 metrów.	1
<b>3.</b>	3.1	Narysowanie wykresu funkcji $f(x) = 0,5x^2 - 2$ w przedziale $\langle -4,3 \rangle$ .	1
	3.2	Narysowanie wykresu funkcji $g(x) = \frac{ f(x) }{f(x)}$ w podanej dziedzinie.	1
	3.3	Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności: $x \in (-2, 2)$ .	1

4.	4.1	Wyznaczenie skali podobieństwa par trójkątów podobnych: $\Delta CNF \sim \Delta AND$ i $\Delta AEM \sim \Delta MDC$ : $k = \frac{1}{2}$ .	1
	4.2	Sformułowanie wniosku dotyczącego długości odcinków $AM, MN, NC$ .	1
	4.3	Wyznaczenie długości odcinków, które są potrzebne do obliczenia pól trójkątów $AEM$ i $CNF$ .	1
	4.4	Wykazanie równości pól trójkątów.	1
5.	5.1	Wyznaczenie współrzędnych środka koła: $S = (-20, 24)$ .	1
	5.2	Wyznaczenie długości promienia koła: $r = 8\sqrt{5}$ .	1
	5.3	Uzasadnienie odpowiedzi.	2
6.	6.1	Obliczenie wartości $W(-2)$ oraz $W(1)$ : $W(-2) = 4c + d - 22$ , $W(1) = c + d + 8$ .	1
	6.2	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} 4c + d = 22 \\ c + d = -5 \end{cases}$	1
	6.3	Rozwiązanie układu równań: $c = 9$ , $d = -14$ .	1
	6.5	Wyznaczenie pierwiastków wielomianu: $x_1 = 1$ , $x_2 = 3$ .	2
	6.6	Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, 3)$ .	1
7.	7.1	Wyznaczenie $\cos x$ z danego równania: $\cos x = 0$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$ .	1
	7.2	Wybranie i zapisanie rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ : $x_1 = \frac{\pi}{3}$ , $x_2 = \frac{\pi}{2}$ , $x_3 = \frac{3}{2}\pi$ , $x_4 = \frac{5}{3}\pi$ .	2
8.	8.1	Zapisanie jedenastu początkowych wyrazów ciągu: $\left\{ 60, 40, 30, 24, 20, 17\frac{1}{7}, 15, 13\frac{1}{3}, 12, 10\frac{10}{11}, 10 \right\}$ .	1
	8.2	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $11^3 = 1331$ .	1
	8.3	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających: $\binom{8}{3} = 56$ .	1
	8.4	Obliczenie prawdopodobieństwa: $\frac{56}{1331}$ .	1

<b>9.</b>	9.1	Wykorzystanie własności czworokąta opisanego na okręgu i stosunku podziału ramienia $BC$ przez punkt styczności $K$ do wprowadzenia oznaczeń np. długość ramienia trapezu $ BC  = 2x + 3x$ , długości podstaw $ AB  = 6x$ , $ CD  = 4x$ .	1
	9.2	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i wyznaczenie $x$ : $x = \frac{\sqrt{6}}{6}r$ .	1
	9.3	Wyznaczenie długości ramienia: $ BC  = \frac{5\sqrt{6}}{6}r$ .	1
	9.4	Wyznaczenie długości przekątnej trapezu: $ BD  = \frac{7\sqrt{6}}{6}r$ .	1
	9.5	Zastosowanie twierdzenia cosinusów w trójkącie $BCD$ : $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}r\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{6}}{6}r\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{6}}{6}r\right)^2 - 2 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{6}r \cdot \left(\frac{7\sqrt{6}}{6}r\right) \cdot \cos \sphericalangle CBD.$	1
	9.6	Wykonanie obliczeń i podanie odpowiedzi: $\cos \sphericalangle CBD = \frac{29}{35}$ .	1
<b>10.</b>	10.1	Sporządzenie rysunku ostrosłupa z zaznaczonym przekrojem.	1
	10.2	Obliczenie długości krawędzi bocznej ostrosłupa: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .	1
	10.3	Wyznaczenie cosinusa kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .	1
	10.4	Obliczenie długości wysokości przekroju: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .	2
	10.5	Obliczenie pola przekroju: $S = \frac{\sqrt{6}}{8}a^2$ .	1
<b>11.</b>	11.1	Wyznaczenie współrzędnych punktów $A, B$ : $A = (0, -5)$ , $B = (5, 0)$	1
	11.2	Wyznaczenie równania symetralnej odcinka $AB$ : $y = -x$ .	1
	11.3	Obliczenie współrzędnych punktu $C$ : $C = \left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ .	2
	11.4	Obliczenie miar kątów trójkąta $ABC$ : $45^\circ$ , $67,5^\circ$ , $67,5^\circ$ .	1

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.